Title	M調和関数の平均値定理 (解析・調和関数空間の構造とその上の作用素論)
Author(s)	真次, 康夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1996), 946: 47-60
Issue Date	1996-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/60246
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
946 巻 1996 年 47-60

M調和関数の平均値定理

信州大理 真次康夫 (Yasuo Matsugu)

§1. Introduction

B_n を $\mathbb{C}^n$ の単位開球, $\mathrm{Aut}(B_n)$ を B_n から B_n の上への両正則写像の全体, ν_n を B_n 上の正規化されたルベーグ測度とする。$f \in C^2(B_n)$ に対して,

$$(\widetilde{\Delta} f)(z) = 4(1-|z|^2)\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_{jk} - z_j\bar{z}_k)\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z), \quad z \in B_n,$$

と定義する。B_n 上で $\widetilde{\Delta} f = 0$ が成立つとき, f をM調和関数であると言う。$f \in C^2(B_n) \cap L^1(\nu_n)$ がM調和であれば, f は次のような平均値定理を満たす:

$$\int_{B_n}(f \circ \psi)\, d\nu_n = f(\psi(0)), \quad \forall \psi \in \mathrm{Aut}(B_n). \qquad (1)$$

この事実の逆に関して, P. Ahern, M. Flores & W. Rudin [1] は次のような形で解答を与えた:

i) $f \in L^\infty(\nu_n)$ が (1) を満たすならば, f は B_n 上でM調和。

ii) $1 \le n \le 11$, $f \in L^1(v_n)$ が(1)を満たすならば、fはB_n上でM調和。

iii) $n \ge 12$ ならば、B_n上でM調和ではないが、条件(1)を満たす $f \in L^1(v_n)$ が存在する。

この講演では、[1]の方法を荷重空間の場合に適用し、その有効性を検証する。最後に、2，3の問題を提示する。

§2. M調和関数

$\psi \in Aut(B_n)$, $a = \psi^{-1}(0) \in B_n$ ならば、ユニタリ変換 $U \in \mathcal{U}(n)$ が一意的に存在し、$\psi = U\varphi_a$ である。ここで、$\mathcal{U}(n)$ は $\mathbb{C}^n$ 上のユニタリ群，更に

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a z - \sqrt{1-|a|^2}\,(z - P_a z)}{1 - \langle z, a\rangle} \quad ; \ z \in B_n,$$

$$P_a z = \begin{cases} \dfrac{\langle z, a\rangle}{|a|^2} a & (a \neq 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (a = 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$$\langle z, a\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{a_j}, \quad |a|^2 = \langle a, a\rangle, \quad z = (z_1, \ldots, z_n), \ a = (a_1, \ldots, a_n)$$

([5], p.28). B_n 上のバーグマン計量に関するラプラース・ベルトラミ作用素を$\tilde{\Delta}$で表わす。即ち，$f \in C^2(B_n)$, $z \in B_n$ に対し，

$$(\tilde{\Delta} f)(z) = \Delta(f \circ \varphi_z)(0) = 4(1-|z|^2)\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_{jk} - z_j \overline{z_k})\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(z),$$

ここで，Δ は通常の（ユークリディアン）ラプラース作用素である（[5], pp. 47–48; [6], p.25)。B_n 上で $\tilde{\Delta} f = 0$

を満たす $f\in C^2(B_n)$ は B_n 上で $\mathcal{M}$ 調和であるとよばれる。

［命題1］ $f\in C(B_n)$ に対し，次の3条件は同値である：

i) $f\in C^2(B_n)$ であり，B_n 上で $\widetilde{\Delta}f=0$ が成立する。

ii) 任意の $z\in B_n$，任意の $r\in[0,1)$ に対し，

$$f(z)=\int_S f(\varphi_z(r\zeta))\,d\sigma(\zeta)$$

が成立する。ここで，$S=\partial B_n=\{z\in\mathbb{C}^n : |z|=1\}$，

σ は S 上のユークリディアン測度であり，$\sigma(S)=1$。

iii) 任意の $z\in B_n$，任意の $r\in(0,1)$ に対し，

$$f(z)=\frac{1}{\tau(E(z,r))}\int_{E(z,r)} f\,d\tau$$

が成立する。ここで，$d\tau(w)=\dfrac{d\nu_n(w)}{(1-|w|^2)^{n+1}}$，$w\in B_n$，

$E(z,r)=\varphi_z(B(0,r))=\{w\in B_n : |\varphi_z(w)|<r\}$．

（証明） i) $\Leftrightarrow$ ii) [5]，p. 52，Theorem 4.2.4，Cor. 2．

ii) $\Rightarrow$ iii) [6]，p. 33．

iii) $\Rightarrow$ i) $\forall r\in(0,1)$ を固定する。$B(0,r)=\{z\in\mathbb{C}^n : |z|<r\}$ 上の $\widetilde{\Delta}$ に関する Dirichlet 問題の可解性（[6]，p. 55，Theorem 5.9）により，$B(0,r)$ 上で $\mathcal{M}$ 調和な $F\in C(\overline{B}(0,r))$ が存在し，$\partial B(0,r)$ 上で $F=f$ を満たす。$B(0,r)$ 上でも $F=f$ が成立すれば，f は $B(0,r)$ 上で $\mathcal{M}$ 調和となり，証明が終わる。$g=f-F$ とおくと，$g\in C(\overline{B}(0,r))$ であり

$\partial B(0,r)$ 上で $g=0$ を満たす。$B(0,r)$ 上でも $g\equiv 0$ であることを示したい。仮にそうでないとする。或る点 $z_0\in B(0,r)$ があって，$g(z_0)\neq 0$. f は実数値としてよいから，g も実数値としてよい。従って，$g(z_0)>0$ 又は $g(z_0)<0$. 前者の場合を考える。 $m=\max\{g(z): z\in\overline{B}(0,r)\}$ とおくと，$m>0$. $K=\{z\in\overline{B}(0,r): g(z)=m\}$ は $B(0,r)$ の空でないコンパクト部分集合である。$\forall z\in\partial K$ を取る。或る $r_0\in(0,1)$ が存在して，$E(z,r_0)\subset B(0,r)$. 従って，

$$m=g(z)=\frac{1}{\tau(E(z,r_0))}\int_{E(z,r_0)} g\,d\tau < m$$

となり矛盾である。(証明終).

〔命題2〕(The One-Radius Theorem). $f\in C(\overline{B_n})$ とする。任意の $z\in B_n$ に対し，$r(z)\in(0,1)$ が存在し，

$$f(z)=\int_S f(\varphi_z(r(z)\zeta))\,d\sigma(\zeta)$$

が成立するならば，f は B_n 上で M 調和である。

(証明). [5], p. 58, §. 4.3.4.

命題2が条件「$f\in C(\overline{B_n})$」を，条件「f は B_n 上の有界な実解析関数」に置き換えた場合に成立するか という問題が [5], §4.3.4 に提示されているが，それは Izuchi [3] によって否定的に解決された。

〔命題3〕 $f\in L^1(\nu_n)$ が B_n 上で M 調和ならば，任意の ψ

$\in \mathrm{Aut}(B_n)$ に対して，$f(\psi(0)) = \int_{B_n} (f\circ\psi)\, d\nu_n$ が成立する。

(証明) $\psi(0) = z \in B_n$ とすると，適当な $U \in \mathcal{U}(n)$ が存在して $\psi = \varphi_z U$. このことと命題1により

$$\int_{B_n} (f\circ\psi)\, d\nu_n = \int_{B_n} (f\circ\varphi_z)\, d\nu_n = 2n\int_0^1 r^{2n-1} dr \int_S f(\varphi_z(r\zeta))\, d\sigma(\zeta) = f(z) = f(\psi(0)).$$

(証明終)

この命題3の逆を§3以下で調べてゆく。

§3. 作用素 T_δ

$\delta \in (-1, \infty)$ に対し，$d\mu_\delta(z) = (1-|z|^2)^\delta d\nu_n(z)$, $z \in B_n$, とおく。$f \in L^1(\mu_\delta)$, $z \in B_n$ に対し,

$$T_\delta(z) = \binom{n+\delta}{n}\int_{B_n} (f\circ\varphi_z)\, d\mu_\delta = \binom{n+\delta}{n}\int_{B_n} \frac{(1-|z|^2)^{n+\delta+1}(1-|w|^2)^\delta}{|1-\langle z, w\rangle|^{2(n+\delta+1)}} f(w)\, d\nu_n(w)$$

と定義する。

[命題1] i) $T_\delta 1 = 1$. 即ち，$(T_\delta 1)(z) = 1$, $\forall z \in B_n$.

ii) 任意の $f \in L^1(\mu_\delta)$ に対し，$T_\delta f$ は B_n 上の実解析的関数。

iii) $f \in L^1(\mu_\delta)$ が B_n 上で M 調和ならば，B_n 上で $T_\delta f = f$.

(証明) i), ii) は明らか。iii) は§2, 命題1を用いて，§2, 命題3の証明と同様に示される。

[命題2] $-1 < \delta < t < \infty$ ならば，T_t は $L^1(\mu_\delta)$ から $L^1(\mu_\delta)$ の中への有界作用素であり，そのノルムは

$$\| T_t \| \le \Gamma(t-\delta)\,\Gamma(n+t+\delta+2) \,/\, \Gamma(t+1)\,\Gamma(n+t+1).$$

（証明） [1], p. 383, Prop. 2.2 の証明と同様に証明される。

［命題 3］ $-1<\delta<\infty$, $f\in L^1(\mu_\delta)$, $\psi\in \mathrm{Aut}(B_n)$ ならば，
$(T_\delta f)\circ\psi = T_\delta(f\circ\psi)$ が B_n 上で成立する。

（証明） [1], p. 384, Prop. 2.3 と同様。

［命題 4］ $-1<\delta<\infty$, $f\in L^1(\mu_\delta)$ とする。

i) $\delta\le k<\infty$ に対し，

$$\tilde{\Delta}(T_k f) = 4(k+1)(n+k+1)(T_k f - T_{k+1} f).$$

ii) 任意の自然数 k に対し，

$$T_{k+\delta} f = \sigma_{k,n}(\tilde{\Delta})(T_\delta f),$$

ここに，

$$\sigma_{k,n}(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}\left\{1-\frac{\lambda}{4(j+\delta)(n+j+\delta)}\right\},\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

（証明） [1], pp. 384–385, Prop 2.4 の証明と同様にできる。

［注意］ 1) 命題 4, ii) の λ の多項式 $\sigma_{k,n}(\lambda)$ は δ に依存している。以後，$-1<\delta<\infty$ なる任意の δ が与えられているとし，一々断わらない。 2) 命題 4, i) より次の事実がわかる：
$f\in L^1(\mu_\delta)$ が 2 つの平均値定理 $T_k f = f = T_{k+1} f$ を或る $k\ge\delta$ に対して満たせば，f は B_n 上で M 調和である。

［命題 5］ $f\in L^1(\mu_\delta)$ ならば，$\lim_{k\to\infty}\|f-T_k f\|_{L^1(\mu_\delta)} = 0$.

（証明） [1], p. 385, Prop 2.5 と同様に示される。

［命題 6］ $f\in L^1(\mu_\delta)$ ならば，$T_\delta T_{1+\delta} f = T_{1+\delta} T_\delta f$.

（証明） [1], pp. 385–386, Prop 2.6 の証明と同様の方法によ

り証明される。

§4. 関数 $\mathfrak{S}_n(\lambda)$ と $\Phi_n(\beta)$

一変数 $\lambda \in \mathbb{C}$ の整関数 $\mathfrak{S}_n(\lambda)$ を,

$$\mathfrak{S}_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{4(j+\delta)(n+j+\delta)} \right\}$$

によって定義する。変数変換 $\lambda = -4\beta(n-\beta)$ 或は $\lambda = -4n^2\alpha(1-\alpha)$, $n\alpha = \beta$, を考える。$1 \le p < \infty$ に対し,

$$\Sigma_{n,p} = \left\{ \beta \in \mathbb{C} : -\frac{1+\delta}{p} < \mathrm{Re}\,\beta < n + \frac{1+\delta}{p} \right\}$$

と定義し, $\Sigma_{n,\infty} = \{ \beta \in \mathbb{C} : 0 \le \mathrm{Re}\,\beta \le n \}$ と定義する。特に, $\Sigma_n \equiv \Sigma_{n,1} = \{ \beta \in \mathbb{C} : -(1+\delta) < \mathrm{Re}\,\beta < n+1+\delta \}$.

$$\Omega_n = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = -4\beta(n-\beta) \text{ for some } \beta \in \Sigma_n \}$$

とおく。

〔命題1〕 $\{\lambda, \beta\} \subset \mathbb{C}$, $\lambda = -4\beta(n-\beta)$, $1 \le p < \infty$ とする。このとき, $X_\lambda \cap L^p(\mu_\delta) \neq \{0\}$ であるためには, $\beta \in \Sigma_{n,p}$ であることが必要十分である。ただし,

$$X_\lambda = \{ f \in C^2(B_n) : \tilde{\Delta} f = \lambda f \}.$$

(証明) 〔1〕, p.387, Prop 3.2 の証明とほぼ同様に示される。

〔命題2〕 $\lambda \in \Omega_n$ ならば, $\mathfrak{S}_n(\lambda) \neq 0$ かつ $\mathfrak{S}_n'(\lambda) \neq 0$.

(証明) 〔1〕, p.387, Prop 3.3 と同様.

〔命題3〕 $\lambda \in \Omega_n$, $f \in X_\lambda \cap L^1(\mu_\delta)$ ならば,

$$T_\delta f = \frac{1}{\sigma_n(\lambda)} f .$$

(証明) $f \in X_\lambda$ より, $z \in B_n$, $0 \le r < 1$, $\eta \in S$ に対し,

$$\int_S f(\varphi_z(r\zeta))\, d\sigma(\zeta) = g_\alpha(r\eta) f(z)$$

が成立する ([5], p.51, Theorem 4.2.4). 従って,

$$(T_\delta f)(z) = \binom{n+\delta}{n} \int_{B_n} (f\circ\varphi_z)\, d\mu_\delta = \binom{n+\delta}{n} \left(\int_{B_n} g_\alpha\, d\mu_\delta\right) f(z) .$$

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, §3, 命題4により

$T_{k+\delta} f = \sigma_{k,n}(\tilde{\Delta}) T_\delta f = c\, \sigma_{k,n}(\tilde{\Delta}) f = c\, \sigma_{k,n}(\lambda) f$,

ここで, $c = \binom{n+\delta}{n} \int_{B_n} g_\alpha\, d\mu_\delta$. $k \to \infty$ とすれば, §3, 命題5より, $f = c\, \sigma_n(\lambda) f$ を得る。$\lambda \in \Omega_n$ だから, 命題1により, $g \in X_\lambda \cap L^1(\mu_\delta) \setminus \{0\}$ が存在する。

$c\, \sigma_n(\lambda) g = g \ne 0$ であるから, $c\, \sigma_n(\lambda) = 1$. ゆえに,

$c = 1/\sigma_n(\lambda)$, $T_\delta f = c f = (1/\sigma_n(\lambda)) f$ となり証明終。

[命題4] $\delta = 0$ の場合. $\{\lambda, \beta\} \subset \mathbb{C}$, $\lambda = -4\beta(n-\beta)$ ならば,

$$\sigma_n(\lambda) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(n+1-\beta)} .$$

(証明) [1], pp.388-389, Prop 3.5 そのもの。

$\mathbb{C}$ 上の有理型関数 Φ_n を,

$$\Phi_n(\beta) = \Gamma(1+\beta)\Gamma(n+1-\beta) / \Gamma(n+1) , \quad \beta \in \mathbb{C},$$

によって定義する。$\Phi_n^{-1}(\infty)=\mathbb{Z}\setminus\{0,1,\dots,n\}$, $\beta\in(\mathbb{R}\setminus\setminus\Phi_n^{-1}(\infty))$ に対し、$\Phi_n(\beta)\in\mathbb{R}$ かつ Φ_n は零点をもたないから $\overline{\Sigma_n}\setminus\{-1,n+1\}$ 上で連続な分枝 $A_n(\beta)\equiv\arg\Phi_n(\beta)$ が存在し、$A_n(0)=0$.

[命題5] $\delta=0$ とする。(a) 任意の $x\in\mathbb{R}$ を固定するとき、$|\Phi_n(x+iy)|$ は $|y|\to\infty$ のとき値 0 に単調に減少する。(b) $\Sigma_{n,\infty}\setminus\{0,n\}$ 上で $|\Phi_n(\beta)|<1$. (c) $0\leq c<1$ を固定する。t が $-\infty$ から $+\infty$ に増加するとき、$A_n(-c-it)$ は $-(n/2+c)\pi$ から $(n/2+c)\pi$ に単調に増加する。(d) $1\leq p<\infty$ に対し、十分大きな n をとれば、方程式 $\Phi_n(\beta)=1$ は $\Sigma_{n,p}\setminus\{0,n\}$ の中に解をもつ。これらの解の個数は、各 n に対し有限個であり、$n\to\infty$ のとき ∞ に増加してゆく。

(証明) [1], pp. 389-391.

[命題6] $\delta=0$ とする。$n\in\mathbb{N}$ に対し、$\{\beta\in\Sigma_n\setminus\{0,n\}: \Phi_n(\beta)-1=0\}=\phi$ であるための必要十分条件は $1\leq n\leq 11$ である。

(証明) [1], p.392, Prop. 3.8.

§5. Ahern-Flores-Rudin の定理

$-1<\delta<\infty$ を固定する。$M=\{f\in L^1(\mu_\delta): T_\delta f=f\}$ とおく。$\delta<t<\infty$ に対し、§3, 命題2により、T_δ は $L^1(\mu_\delta)$ から $L^1(\mu_t)$ への有界作用素であり、恒等作用素 I

も $L^1(\mu_\delta)$ から $L^1(\mu_\delta)$ への有界作用素である。$M=\{f \in L^1(\mu_\delta) : (I-T_\delta)f=0\}$ であるから、M は $L^1(\mu_\delta)$ の閉部分空間である。$f\in M$ ならば、$f=T_\delta f$ は§3, 命題1により、B_n 上で実解析的である。そこで、偏微分作用素 $\tilde{\Delta}$ の M への制限 $\tilde{\Delta}_M$ を考えることができる。$f\in M$ に対し、§3, 命題4より、$\tilde{\Delta}_M f=\tilde{\Delta} f=\tilde{\Delta}(T_\delta f)=4(\delta+1)\times(n+\delta+1)(T_\delta f-T_{\delta+1}f)=4(\delta+1)(n+\delta+1)(f-T_{\delta+1}f)$ が成立する。従って、M 上で $\tilde{\Delta}_M=c(I-T_{\delta+1})$, ただし $c=4(\delta+1)\times(n+\delta+1)$. $T_{\delta+1}$ は $L^1(\mu_\delta)$ から $L^1(\mu_\delta)$ の中への有界作用素であるから、$\tilde{\Delta}_M$ は M から $L^1(\mu_\delta)$ の中への有界作用素となる。更に、§3, 命題6より、$\tilde{\Delta}_M(M)\subset M$ が従うことが容易にわかる。ゆえに、$\tilde{\Delta}_M$ は M から M の中への有界作用素である。

任意の $f\in M$, 任意の $k\in N$ に対し、§3, 命題4より、$T_{k+\delta}f=\sigma_{k,n}(\tilde{\Delta})(T_\delta f)=\sigma_{k,n}(\tilde{\Delta}_M)f$ であるから、$k\to\infty$ とすることにより、§3, 命題5を用いると、$f=\sigma_n(\tilde{\Delta}_M)f$ である。ここで、作用素ノルムに関して、$\lim_{k\to\infty}\sigma_{k,n}(\tilde{\Delta}_M)=\sigma_n(\tilde{\Delta}_M)$ である。ゆえに、M 上で $\sigma_n(\tilde{\Delta}_M)=I$ が成立つ。$E_n=\{\lambda\in\Omega_n : \sigma_n(\lambda)=1\}$ とおくと、E_n は $\tilde{\Delta}_M$ の固有値全体 $\sigma_p(\tilde{\Delta}_M)$ と一致する。実際、$\lambda\in E_n$ ならば、$\lambda\in\Omega_n$ であるから、対応して $\beta\in\Sigma_n=\Sigma_{n,1}$. §4, 命題1より、$f\in X_\lambda\cap L^1(\mu_\delta)\setminus\{0\}$ が存在する。§4, 命題3より、

$T_\delta f = (1/\sigma_n(\lambda)) f = f$ となり，$f \in M \setminus \{0\}$．$\widetilde{\Delta}_M f = \widetilde{\Delta} f = \lambda f$ であるから，$\lambda \in \sigma_p(\widetilde{\Delta}_M)$．逆に，$\lambda \in \sigma_p(\widetilde{\Delta}_M)$ とすれば，$\widetilde{\Delta}_M f = \lambda f$ を満たす $f \in M \setminus \{0\}$ が存在する。$f \in X_\lambda \cap L^1(\mu_\delta) \setminus \{0\}$ だから，$X_\lambda \cap L^1(\mu_\delta) \neq \{0\}$．§4，命題1より，$\beta \in \Sigma_{n,1} = \Sigma_n$．対応して，$\lambda \in \Omega_n$．§4，命題3より，$T_\delta f = (1/\sigma_n(\lambda)) f$ を得る。他方，$f \in M$ より $T_\delta f = f$ であるから，$\sigma_n(\lambda) = 1$．ゆえに，$\lambda \in E_n$ が従う。

これ以後，$\delta = 0$ とする。しからば，

$$\sigma_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{4j(n+j)} \right\}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\frac{1}{\sigma_n(\lambda)} = \Phi_n(\beta) = \frac{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(n+1)}, \quad \lambda = -4\beta(n-\beta).$$

ガンマ関数 Γ の性質を用いて，調べると，§4，命題5，(d) より，E_n は有限集合であり，$0 \in E_n$ かつ E_n は次の形をしている：

$$E_n = \{\lambda \in \Omega_n : \sigma_n(\lambda) = 1\} = \{0, \lambda_1, \overline{\lambda_1}, \cdots, \lambda_{m(n)}, \overline{\lambda_{m(n)}}\},$$

ここで，$m(n) \in \mathbb{Z}_+$，$\mathrm{Im}\,\lambda_j > 0 \ (1 \leq j \leq m(n))$．更に，[1]，p.392，Prop. 3.8 により，次の事実が数値計算を用いてわかる．i) $n \leq 11$ ならば，$m(n) = 0$，従って，$E_n = \{0\}$．ii) $n \geq 12$ ならば，$m(n) \geq 1$，従って，$E_n \supsetneqq \{0\}$．

さて，バナッハ空間 M は次のように直和分解できる：

$$M = \sum_{\lambda \in E_n} \oplus \{X_\lambda \cap L^1(V_n)\}.$$

実際，E_n の各点で1位の零点をもち，他に零点をもたないモニックな多項式を Q とする。1からば，

$$F(\lambda) Q(\lambda) = G_n(\lambda) - 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

$$F(\lambda) \neq 0 \quad , \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus E_n$$

を満たす $\mathbb{C}$ 上の整関数 F が存在する。スペクトル写像定理により，$\sigma_p(F(\widetilde{\Delta}_M)) = F(\sigma_p(\widetilde{\Delta}_M)) = F(E_n) \not\ni 0$.
ゆえに，写像 $F(\widetilde{\Delta}_M) : M \to M$ は1対1である。
$F(\widetilde{\Delta}_M) Q(\widetilde{\Delta}_M) = G_n(\widetilde{\Delta}_M) - I = 0$ であるから，M 上で $Q(\widetilde{\Delta}_M) = 0$ であることがわかる。これより，[1], p.393, Lemma 4.1 を用いると，$M = \sum_{\lambda \in E_n} \{X_\lambda \cap L^1(V_n)\}$ が得られる。この分解と上述の集合 E_n の性質を用いることにより，次の結果を得る。

i) $n \leq 11$ ならば，$M = X_0 \cap L^1(V_n) = \{f \in L^1(V_n) : \widetilde{\Delta} f = 0\}$. 即ち，$f \in L^1(V_n)$ に対し，$T_0 f = f$ であるための必要十分条件は，$\widetilde{\Delta} f = 0$ である。

ii) $n \geq 12$ ならば，$\{0\} \subsetneq X_\lambda \cap L^1(V_n) \subset M$ を満たす $\lambda \in E_n \setminus \{0\}$ が存在する。$f \in X_\lambda \cap L^1(V_n) \setminus \{0\}$ に対し，$T_0 f = f$ しかし $\widetilde{\Delta} f = \lambda f \neq 0$.

一般の $p \in [1, \infty]$ に対しては，同様な考察により，次の

ような結果を得る。$E(n,p)=\{\lambda\in E_n : X_\lambda\cap L^p(V_n)\neq\{0\}\}$ とおくと、$0\in E(n,p)\subset E_n$, $E(n,1)=E_n$. $M\cap L^p(V_n)$ は、

$$M\cap L^p(V_n)=\sum_{\lambda\in E(n,p)}\oplus X_\lambda\cap L^p(V_n)$$

の形に直和分解できる。特に、$p=\infty$ のとき、

$E(n,\infty)=\{0\}$,

$M\cap L^\infty(V_n)=X_0\cap L^\infty(V_n)=\{f\in L^\infty(V_n):\tilde{\Delta}f=0\}$,

即ち、$f\in L^\infty(V_n)$ に対し、$T_0f=f$ であるための必要十分条件は（次元 n に関係なく）$\tilde{\Delta}f=0$ である。

§6. 2, 3 の問題.

〔問題1〕 Ahern-Flores-Rudin の定理は、任意の $\delta\in(-1,\infty)$ に対し、$L^1(\mu_\delta)$ に属する関数 f について、どのような条件で成立するか。即ち、$f\in L^1(\mu_\delta)$, $T_\delta f=f$ ならば、f は B_n 上で M 調和であるか？

〔問題2〕 Ahern-Flores-Rudin の定理は、関数の定義域を B_n から多重円板に置き換えたとき成立するか？

〔問題3〕 f を B_n 上で有界な実解析的関数とする。任意の $z\in B_n$ に対し、$r(z)\in(0,1)$ が存在し、

$$f(z)=\frac{1}{\tau(E(z,r(z)))}\int_{E(z,r(z))}f\,d\tau$$

が成立すると仮定する。このとき、f は B_n 上で M 調和か？

［問題4］ Ω を B_n の相対コンパクトな部分領域とする。B_n 上の任意のM調和関数 f に対して、

$$f(a) = \frac{1}{\tau(\Omega)} \int_{\Omega} f\, d\tau$$

が成立すると仮定する。ここで、$a \in B_n$ は f に依存しない定点である。このとき、ある $r \in (0,1)$ が存在して、$\Omega = E(a, r)$ となるか？ （cf. [2], [4]）.

引用文献

[1] P. Ahern, M. Flores and W. Rudin, An invariant volume-mean-value property, J. Func. A., 111 (1993), 380-397.

[2] B. Epstein and M. M. Schiffer, On the mean value properties of harmonic functions, J. d'Analyse Math., 14 (1965), 109-111.

[3] K. Izuchi, The one-radius theorem is not true for bounded real-analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 103 (1988), 823-830.

[4] 金子宏 and 阪井章, 調和関数の平均値とブラウン運動, 数学, 41 (1989), 86-88.

[5] W. Rudin, Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.

[6] M. Stoll, Invariant Potential Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, London Math. Soc. Lecture Note Series 199, 1994.